# СТРЮКОВ П. В., ГЕРБЕРТ Д. В., ПАРМУЗИНА М. С. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ ТАБЛИЧНО С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СРЕДЫ MS EXCEL

*УДК 519.6, ВАК 1.2.2., ГРНТИ 50.41.25*

Дифференцирование и интегрирование функций, заданных таблично с использованием среды MS Excel

**П. В. Стрюков, Д. В. Герберт, Пармузина М. С.**

Ухтинский государственный технический университет, г. Ухта

*При решении разнообразных проблем часто необходимо произвести интегрирование или дифференцирование какой-либо функции. Однако, на практике, часто бывает так, что известны лишь значения функции. В этом случае для нахождения производной или интеграла используются разнообразные численные методы, некоторые из которых будут рассмотрены в статье.*

***Ключевые слова:*** *численные методы, дифференцирование, интегрирование, MS Excel*

Differentiation and integration of functions defined tabularly using the MS Excel environment

**P. V. Strukov, D. V. Herbert, Parmuzina M. S.**

Ukhta State Technical University, Ukhta

*When solving various problems, it is often necessary to integrate or differentiate a function. However, in practice, it often happens that only the values of the function are known. In this case, various numerical methods are used to find the derivative or integral, some of which will be discussed in the article.*

***Keywords:*** *numerical methods, differentiation, integration, MS Excel*

## Введение

Методы интегрирования и дифференцирования применяются в разнообразных практических задачах. Невозможно привести область человеческой деятельности, где нельзя было бы провести исследование, включающее в себя нахождение производной или интеграла. В качестве примеров можно привести некоторые задачи: инженерные расчеты прочности, машинное обучение, экономические и технические задачи на оптимизацию различных процессов, метеорологические прогнозы и расчеты во многих других областях [1].

Стоит отметить, что существует два способа вычисления интегралов и производных – аналитический (точный) и численный (чаще всего приближенный). Численные методы, в отличие от аналитических, в большинстве случаев дают ответ с определенной погрешностью, но, тем не менее, именно они являются наиболее часто применяемыми на практике. Это объясняется тем, что для большинства функций, ввиду их высокой сложности, нецелесообразно, а иногда и вовсе невозможно найти интеграл или производную аналитически.

Численные методы во многом работают не столько с самой функцией, сколько с её отдельными значениями. В свою очередь часто в реальных практических задачах бывает так, что проинтегрировать или продифференцировать надо неявно заданную функцию, а функцию, у которой известны некоторые отдельные значения. Эти значения могут быть получены в ходе эксперимента или в ходе применения других численных методов. В таком случае говорят, что функция задана таблично или в некоторых узлах.

Существует множество разнообразных численных методов, при помощи которых можно проинтегрировать и продифференцировать функции, заданные таблично. Для численного интегрирования могут использоваться методы: прямоугольников, трапеций, парабол, Ньютона, Симпсона, Гаусса, Монте-Карло и многие другие. Интересно, что для дифференцирования в вычислительной математике методов значительно меньше. Основными являются методы, основанные на определении производной (конечных разностей); интерполяционные методы и метод, основанный на интегральной формуле Коши. У всех вышеперечисленных методов есть свои сильные и слабые стороны, и каждый из них имеет своё практическое применение [2, 3, 4].

В данной статье нами были рассмотрены некоторые численные методы вычисления производных – это метод конечных разностей и метод Лагранжа, а для вычисления интегралов – метод трапеций и метод Симпсона.

По определению производная для функции $y=f(x)$ имеет вид: $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$. Самыми простыми формулами для вычисления первой производной являются **двухточечные формулы дифференцирования вперед и назад:** $f'(x)_в\approx\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ и $f'(x)_н\approx\frac{f(x)-f(x-\Delta x)}{\Delta x}$. Они дают погрешность примерно одинаковой величины, но разного знака и поэтому обычно используют среднее значение производных, получаемых по этим формулам (через центральные разности): $f'(x)_ц=\frac{1}{2}\left(f'(x)_в+f'(x)_н\right)\approx\frac{f(x+\Delta x)-f(x-\Delta x)}{2\Delta x}$.

При использовании формул численного дифференцирования результат зависит от правильного выбора дифференцирующего приращения аргумента $\Delta x$. Оно должно быть достаточно малым. Критерием правильности выбора $\Delta x$ для произвольной функции может быть сравнение результатов вычисления производных при двух значениях $\Delta x$ и $\frac{\Delta x}{2}$. Если результаты расчета различаются между собой на величину, небольшую заданной погрешности ε, то выбор величины $\Delta x$ следует считать правильным [1].

Для более точного вычисления производной применяются разнообразные численные методы на основе интерполяций. Одним из таких методов является метод Лагранжа. Пусть функция $f(x)$ задана на промежутке $[a; b]$, *где* $a = x_0$, $b = x_n$, $h = \dfrac{b-a}{n}$, $t = \dfrac{x - x_0}{h}$.

Тогда по формуле Лагранжа производная имеет вид:

$$f'(x) \approx f'(x_0 + t \cdot h) = \frac{1}{h}\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{(t-0)(t-1)(t-2)\ldots(t-n)}{t-i}\right).$$

Другим часто применимым способом вычисления производной при помощи интерполяций является метод Ньютона-Стирлинга. Для той же самой функции, с узлами $x_0, \ldots, x_k$, где $h = x_{i+1} - x_i$ $i = 0,1,2,\ldots,n-1$ $t = \dfrac{x - x_o}{h}$ производная вычисляется как сложная функция следующим образом.

$$f'(x) \approx \frac{1}{h}[\Delta y_0 + \frac{d}{dt}(\frac{t(t-1)}{2!}) \cdot \Delta^2 y_0 + \frac{d}{dt}(\frac{t(t-1)(t-2)}{3!}) \cdot \Delta^3 y_0 + \ldots +$$
$$+ \frac{d}{dt}(\frac{t(t-1)\ldots(t-k+1)}{k!}) \cdot \Delta^k y_0].$$

Где $\Delta^{k+1} y_i = \Delta^k y_{i+1} - \Delta^k y_i$; $\Delta^1 y_0 = \Delta^0 y_1 - \Delta^0 y_0$.

Для вычисления в узловой точке $x = x_0$, $t = 0$ формулу можно сократить до

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{h}[\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 - \ldots + \frac{1}{k}\Delta^k y_o].$$

Стоит отметить, что данные способы вычисления имеют определенную погрешность. Рассмотрим пример вычисления производной и оценим полученную погрешность.

Рассмотрим пример вычисления производной. Для определенности рассмотрим функцию $y = \sin(2 \cdot arctg(x^2 - 5)) \cdot e^{-\frac{tg(x)}{ch(x)}} \cdot \ln(x^5 + 4)$ и найдем значение производной в нескольких точках. Составим для этой функции таблично заданную функцию на отрезке [0; 1].

Таблица 1 – Таблица значений функции в узлах на отрезке [0; 1]

| $i$ | $x$ | $y$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | -0,53319 |
| 1 | 0,1 | -0,48342 |
| 2 | 0,2 | -0,44037 |
| 3 | 0,3 | -0,40348 |
| 4 | 0,4 | -0,37225 |
| 5 | 0,5 | -0,34625 |
| 6 | 0,6 | -0,32509 |
| 7 | 0,7 | -0,30842 |
| 8 | 0,8 | -0,29565 |
| 9 | 0,9 | -0,28566 |
| 10 | 1 | -0,27605 |

Вычислим первую производную аналитически и сравним со значениями, полученными численными методами.

Найдем значения производной функции $y = \sin(2 \cdot arctg(x^2 - 5)) \cdot e^{-\frac{tg(x)}{ch(x)}} \cdot \ln(x^5 + 4)$ в некоторых точках, используя **двухточечные формулы дифференцирования** при $\Delta x = 0{,}1$. Расчеты будем проводить в программе MS Excel. Используем для проведения расчетов программу Mathcad [5]. Сравним полученные результаты, с результатами, полученными аналитическим методом в программе Mathcad (Рисунок 1).

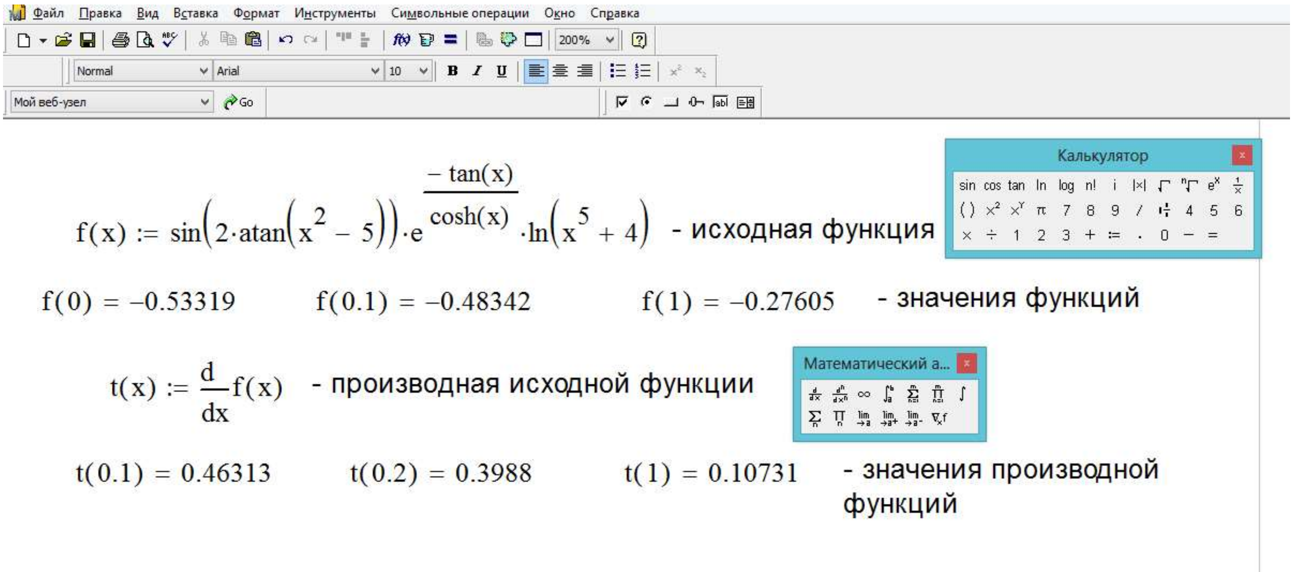


Рисунок 1 – Вычисление значений функций и производной в Mathcad

Согласно приближенной двухточечной формуле дифференцирования имеем: $f'(x) \approx \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x)}{2 \cdot \Delta x}$.

Рассчитаем для нашего случая:

$$f'(0{,}1) \approx \frac{f(0{,}1+0{,}1) - f(0{,}1-0{,}1)}{2 \cdot 0{,}1} = \frac{f(0{,}2) - f(0)}{0{,}2} = \frac{-0{,}44037 - (-0{,}53319)}{0{,}2} =$$

$=0{,}46408$;

$$f'(0{,}2) \approx \frac{f(0{,}2+0{,}1) - f(0{,}2-0{,}1)}{2 \cdot 0{,}1} = \frac{f(0{,}3) - f(0{,}1)}{0{,}2} = \frac{-0{,}40348 - (-0{,}48342)}{0{,}2} =$$

$=0{,}39969$ И т. д.

Остальные значения найдем в MS Excel и сравним с точными значениями, вычисленными в Mathcad.

Таблица 2 – Результаты применения двухточечной формулы дифференцирования и сравнение их с точными значениями

| *i* | *x* | *Производная по приближенной двухточечной формуле* | *Производная по точной формуле* | *Погрешность* |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,1 | 0,464083721 | 0,46313 | 0,000953721 |
| 2 | 0,2 | 0,399692875 | 0,3988 | 0,000892875 |
| 3 | 0,3 | 0,340598883 | 0,33981 | 0,000788883 |
| 4 | 0,4 | 0,286189928 | 0,28553 | 0,000659928 |
| 5 | 0,5 | 0,235805385 | 0,23522 | 0,000585385 |
| 6 | 0,6 | 0,189156099 | 0,18846 | 0,000696099 |
| 7 | 0,7 | 0,147209476 | 0,14596 | 0,001249476 |
| 8 | 0,8 | 0,113776603 | 0,11112 | 0,002656603 |
| 9 | 0,9 | 0,09800084 | 0,0925 | 0,00550084 |

Можем заметить, что значения по приближенной формуле получились достаточно близкими к точным значениям.

Далее рассчитаем производную той же функции методом Лагранжа, для той же таблицы значений (Таблица 3)

Тогда по формуле Лагранжа:

$$f'(x) \approx \frac{1}{h}\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{(t-0)(t-1)(t-2)\ldots(t-n)}{t-i}\right) \tag{5}$$

$$h = \frac{1-0}{10} = 0{,}1 \qquad t(0{,}1) = \frac{0{,}1-0}{0{,}1} = 1$$

$$f'(0{,}1) = \frac{1}{0.1}\sum_{i=0}^{10} f(x_i)\cdot\frac{(-1)^{10-i}}{i!(10-i)!}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{(t-0)(t-1)(t-2)...(t-10)}{t-i}\right) =$$

$$= \frac{1}{0{,}1}\cdot\left[\begin{array}{l}(-0{,}53319)\cdot\dfrac{(-1)^{10-0}}{0!(10-0)!}\cdot\dfrac{d}{dt}\big((t-1)(t-2)\ldots(t-10)\big) + (-0{,}48342)\cdot\dfrac{(-1)^{10-1}}{1!(10-1)!}\cdot \\ \cdot\dfrac{d}{dt}\big((t-0)(t-2)(t-3)\ldots(t-10)\big) + \ldots + (-0{,}27605)\dfrac{(-1)^{10-10}}{10!(10-10)!}\cdot \\ \cdot\dfrac{d}{dt}\big((t-0)(t-1)(t-2)(t-3)\ldots(t-9)\big)\end{array}\right]$$

Далее находим производные функций от $t$, после чего подставляем в получившуюся формулу их значения. Таким образом: $f'(0{,}1) \approx 0{,}463018$, а при $t(0{,}2) = \dfrac{0{,}2-0}{0{,}1} = 2$:

$$f'(0{,}2) = \frac{1}{0.1}\sum_{i=0}^{10} f(x_i)\cdot\frac{(-1)^{10-i}}{i!(10-i)!}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{(t-0)(t-1)(t-2)...(t-10)}{t-i}\right) =$$

$$=\frac{1}{0,1}\cdot\left[\begin{array}{l}(-0{,}53319)\cdot\dfrac{(-1)^{10-0}}{0!(10-0)!}\cdot\dfrac{d}{dt}\big((t-1)(t-2)\ldots(t-10)\big)+(-0{,}48342)\cdot\dfrac{(-1)^{10-1}}{1!(10-1)!}\cdot\\ \cdot\dfrac{d}{dt}\big((t-0)(t-2)(t-3)\ldots(t-10)\big)+\ldots+(-0{,}27605)\dfrac{(-1)^{10-10}}{10!(10-10)!}\cdot\\ \cdot\dfrac{d}{dt}\big((t-0)(t-1)(t-2)(t-3)\ldots(t-9)\big)\end{array}\right]$$

Далее находим производные функций от $t$, после чего подставляем в получившуюся формулу их значения. Таким образом:

$$f'(0{,}2)\approx 0{,}39880\text{2}$$

Очевидно, что отличия вычислений производных в различных точках на заданном промежутке начинаются лишь на этапе подстановки численного значения $t$. Посчитаем остальные значения в программе MS Excel.

Таблица 3 – Результаты применения формулы Лагранжа для дифференцирования и сравнение их с точными значениями

| *i* | *x* | *Производная по формуле Лагранжа* | *Производная по точной формуле* | *Погрешность* |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,1 | 0,463018174454803 | 0,46313 | 0,000111826 |
| 2 | 0,2 | 0,398801685691706 | 0,3988 | 0,000001685 |
| 3 | 0,3 | 0,339770557248338 | 0,33981 | 0,000039442 |
| 4 | 0,4 | 0,285577162706437 | 0,28553 | 0,000047162 |
| 5 | 0,5 | 0,235267687449406 | 0,23522 | 0,000047687 |
| 6 | 0,6 | 0,188508860620654 | 0,18846 | 0,000048860 |
| 7 | 0,7 | 0,14601333469984 | 0,14596 | 0,000053334 |
| 8 | 0,8 | 0,111063820919521 | 0,11112 | 0,000056179 |
| 9 | 0,9 | 0,0899748493101501 | 0,0925 | 0,002525150 |

Можем заметить, что точность вычисления по приближенной формуле Лагранжа в среднем превосходит точность двухточечной формулы на порядок.

Далее рассчитаем производную той же функции методом Ньютона-Стирлинга, Для той же таблицы значений (Таблица 4).

Тогда по формуле Ньютона-Стирлинга:

$$f'(x)=\frac{1}{h}\cdot\left(\Delta y_0+\frac{d}{dt}\left(\frac{t(t-1)}{2!}\right)\cdot\Delta^2 y_0+\ldots+\frac{d}{dt}\left(\frac{(t-0)(t-1)(t-2)\ldots(t-k+1)}{k!}\right)\cdot\Delta^k y_0\right)$$

.

Вычислим значения $h=0{,}1-0=0{,}1,\quad t=\dfrac{0{,}1-0}{0{,}1}=1.$

Рекурсивно вычислим $\Delta y$: $\Delta^1 y_0=\Delta^0 y_1-\Delta^0 y_0=y_1-y_0=0{,}04977$

$\Delta^2 y_0=\Delta^1 y_1-\Delta^1 y_0=\Delta^0 y_2-\Delta^0 y_1-\Delta^0 y_1+\Delta^0 y_0=y_2-2y_1+y_0=$ -0,00672 и т. д.

$$f'(0{,}1)=\frac{1}{0{,}1}\cdot(0{,}04977+\frac{d}{dt}\left(\frac{(t-0)(t-1)}{2!}\right)\cdot(-0{,}00672)+\ldots+\frac{d}{dt}\left(\frac{(t-0)(t-1)\ldots(t-8)}{9!}\right)\cdot$$
$$\cdot(-0{,}000959)).$$

Далее находим производные функций от $t$, после чего подставляем в получившуюся формулу их значения. Таким образом:

$$f'(0{,}1)\approx 0{,}46312$$

Очевидно, что отличия вычислений производных в различных точках на заданном промежутке начинаются лишь на этапе подстановки численного значения $t$. Посчитаем остальные значения в программе MS Excel.

Таблица 4 – Результаты применения формулы Ньютона-Стирлинга для дифференцирования и сравнение их с точными значениями

| *i* | *x* | *Производная по формуле Ньютона-Стирлинга* | *Производная по точной формуле* | *Погрешность* |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,1 | 0,463125848010623 | 0,46313 | 0,000004151 |
| 2 | 0,2 | 0,398802186907956 | 0,3988 | 0,000002186 |
| 3 | 0,3 | 0,339814748762601 | 0,33981 | 0,000004748 |
| 4 | 0,4 | 0,285528267551108 | 0,28553 | 0,000001732 |
| 5 | 0,5 | 0,235219725617324 | 0,23522 | 0,000000274 |
| 6 | 0,6 | 0,188460359857237 | 0,18846 | 0,000000359 |
| 7 | 0,7 | 0,14596121742738 | 0,14596 | 0,000001217 |
| 8 | 0,8 | 0,111119474952276 | 0,11112 | 0,000000525 |
| 9 | 0,9 | 0,0925103121734776 | 0,0925 | 0,000010312 |

Можем заметить, что точность вычисления по приближенной формуле Ньютона-Стирлинга в среднем превосходит точность Лагранжа формулы на порядок.

Далее рассмотрим численное интегрирование. В тех случаях, когда для вычисления определённого интеграла $\int_a^b f(x)dx$ не представляется возможным использовать точную формулу Ньютона-Лейбница (первообразную нельзя выразить в элементарных функциях; значения функции $f(x)$ заданы в виде таблицы), применяют численные методы вычисления интеграла. Для реализации численного метода используется приближенные формулы вычисления, основанные на геометрическом приложении определенного интеграла: определенный интеграл на отрезке [$a$; $b$] от функции $f(x)$ равен площади, криволинейной трапеции, которая ограничена линиями $x=a, x=b, y=f(x)$ (рисунок 3). Благодаря этому задача о приближенном вычислении интеграла равносильна задаче о приближенном вычислении площади криволинейной трапеции. При этом кривая $f(x)$ заменяется новой кривой, которая достаточно «близка» к данной. Тогда искомая площадь приближенно равна площади криволинейной трапеции, ограниченной новой кривой. В качестве этой кривой выбирают такую, для которой площадь криволинейной трапеции подсчитывается просто. В зависимости от выбора новой кривой (метода аппроксимации) мы получаем ту или иную приближенную формулу, часто называемую квадратурной [3].

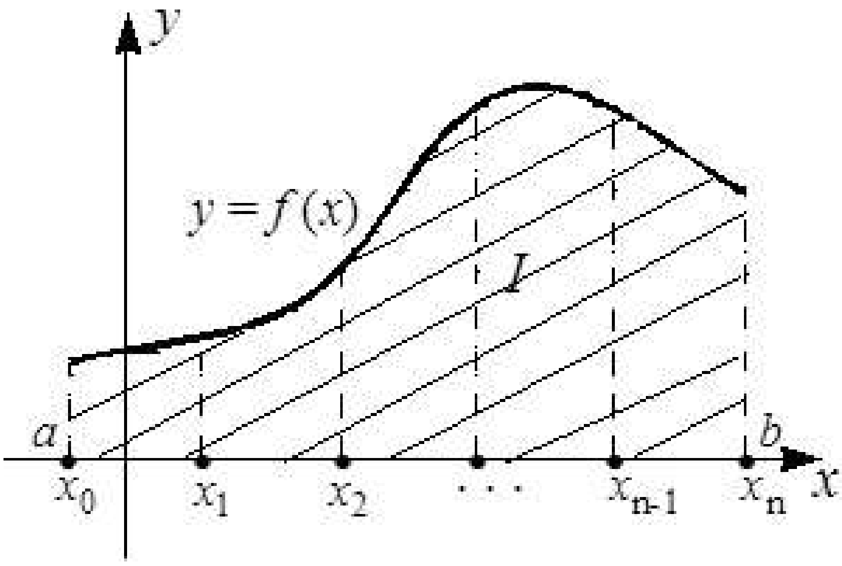


Рисунок 3 – Схема численного интегрирования

Рассмотрим приближенные методы вычисления интегралов: метод трапеций и метод Котеса.

Приближенные формулы предусматривают разбиение отрезка $\left[a;b\right]$ на равные частичные отрезки $\left[x_{i-1};x_i\right],\ i=1,2,...,n,\ x_0=a,\ x_n=b$ длиной $h=\left(b-a\right)/n$.

Вычисление определённого интеграла по методу трапеций в таком случае рассчитывается по формуле: $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=a}^{b} f(x_i)(x_{i+1}-x_i)+\frac{(f(x_{i+1})-f(x_i))(x_{i+1}-x_i)}{2}$ или, если заданы значения функции, то формула $\int_a^b f(x)dx \approx h\cdot\left(\frac{y_0}{2}+y_1+y_2+...+y_{n-1}+\frac{y_n}{2}\right)$.

Если рассмотреть данный метод графически, то можно сказать, что подынтегральная площадь разбивается на прямоугольники и треугольники (рисунок 1). При этом площадь треугольников можно определить как $S_i=\frac{(f(x_{i+1})-f(x_i))(x_{i+1}-x_i)}{2}$, а прямоугольников – $S_i=f(x_i)(x_{i+1}-x_i)$ [4].

Метод Котеса является модернизацией метода Симпсона, так же известного как метод парабол. Формула Симпсона для функции, определенной на отрезке $[a;b]$, имеет следующий вид: $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\cdot(f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)$.

Для более точного вычисления необходимо разбить область $[a;b]$ на $n$ отрезков вида $[x_{2i-2};x_{2i}]$. При этом, $x_{2i-1}$ будут являться серединами этих отрезков. Тогда шаг определяется $h=\frac{b-a}{2n}$. Следовательно, $x_i = a+ih$, где $i = 0,1,2,\dots,2n$. Применив формулу Симпсона на всех полученных нами отрезках, выведем формулу метода Котеса [5]:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\cdot[f(x_0)+4\sum_{i=1}^{n} f(x_{2i-1})+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i})+f(x_{2n})]. \qquad (7)$$

Применение этих формул для таблично заданной функции является удобной и понятной процедурой.

Рассмотрим пример вычисления интеграла. Для определенности рассмотрим ту же самую функцию, которую рассматривали при нахождении производных выше. Вычислим интеграл с помощью программы Mathcad (рисунок 4) и сравним с приближенными формулами.

Исходный интеграл будет иметь вид:

$$\int_0^1 \sin(2\cdot arctg(x^2-5))\cdot e^{-\frac{tg(x)}{\cosh(x)}}\cdot \ln(x^5+4)dx.$$

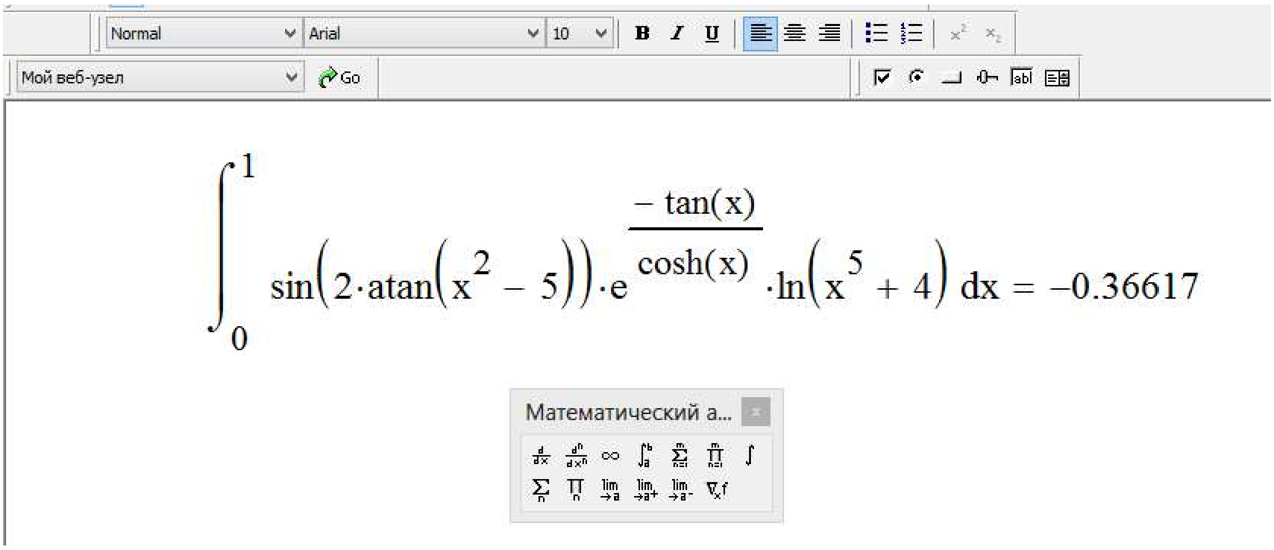


Рисунок 1 – Результат вычисления определенного интеграла в MathCad

Используя значения из Таблицы 1, приближенное вычисление определённого интеграла по методу трапеций будет иметь вид:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\cdot\left(\frac{y_0}{2}+y_1+y_2+\dots+y_{n-1}+\frac{y_n}{2}\right)=$$

$$0,1\cdot\left(\frac{-0,53319}{2}+(-0,48342)+(-0,44037)+\dots+\frac{-0,27605}{2}\right)=-0,36652.$$

Сравнивая с точным значением, найдем погрешность $\varepsilon = \left|I_{точн} - I_{прибл}\right| = \left|-0,36617 - (-0,36652)\right| = 0,0004$.

Используя значения из Таблицы 1, приближенное вычисление определённого интеграла той же функции по формуле Котеса будет иметь вид:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\cdot[f(x_0)+4\sum_{i=1}^{n} f(x_{2i-1})+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i})+f(x_{2n})],$$ при

$h=\frac{1-0}{2\cdot 5}=0{,}1$, тогда $\int_0^1 f(1)dx=\frac{0{,}1}{3}\cdot\left(f(x_0)+4\cdot\sum_{i=1}^{5} f(x_{2i-1})+2\cdot\sum_{i=1}^{4} f(x_{2i})+f(x_{10})\right)$.

$$\int_0^1 f(1)dx=\frac{0{,}1}{3}\cdot(-0{,}53319+4\cdot((-0{,}48342)+(-0{,}40348)+\ldots+(-0{,}28566))+$$

$$2\cdot((-0{,}44037)++(-0{,}37225)+\ldots+(-0{,}29565))+(-0{,}27605))=-0{,}366163.$$

Сравнивая с точным значением, найдем погрешность, которая оказалась достаточно маленькой $\varepsilon=\left|I_{точн}-I_{прибл}\right|=\left|-0{,}36617-(-0{,}366163)\right|=0{,}000007$.

Для удобства проведения необходимых расчетов, нами была выбрана среда MS Excel. Данный выбор обусловлен высокой гибкостью возможностей разработки (благодаря поддержке VBA), относительная простота использования, распространённость, и как следствие – поддержка практически любым компьютером.

В виду того, что все разобранные нами формулы являются итерируемыми, нет никакой особой сложности в их компьютерном описании. При этом стоит отметить, что вычисление факториалов и дельта-функции в методе Ньютона-Стирлинга основано на рекурсии. При этом глубины рекурсии в языке VBA вполне хватает, на то, чтобы данные вычисления производились без каких-либо особых проблем.

При помощи языка VBA и встроенной в него библиотеки визуальных компонентов, нами была создана программа, позволяющая легко применять данные вычислительные методы к любой заданной функции. Стоит также отметить, что наша программа позволяет вычислять производную и интеграл таблично заданной функции (т.е. не обязательно задавать формулу каким-либо уравнением). Именно это, выгодно отличает её от таких программ, как например Mathcad. Также стоит отметить тот факт, что наша программа обладает весьма скромными системными требованиями, она занимает 3 мегабайта, и во время вычислений потребляет не более 75 мегабайт оперативной памяти.

## Вывод

Решение практических задач нахождения интегралов и производных таблично заданных функций в настоящее время направлено на оптимизацию и совершенствование уже известных методов. В литературе можно найти множество модификаций численных методов решения математических задач дифференцирования и интегрирования [6]. В нашей работе мы познакомились с основами численных методов, что в дальнейшем даст нам возможность совершенствовать наши навыки.

## Список использованных источников и литературы

1. Лютоев А. А. Прикладная математика и математическое моделирование : учебное пособие / А. А. Лютоев, Е. Н. Мотрюк. – Ухта: УГТУ, 2022. – 156 с.

2. Амосов А. А. Вычислительные методы / А. А. Амосов, Ю. А. Дубинский, Н. В. Копченова. – Москва: Лань, 2014. – 672 с.

3. Демидович Б. П. Основы вычислительной математики / Б. П. Демидович, И. А. Марон. – Москва: Лань, 2011. – 672 с.

4. Турчак Л. И. Основы численных методов : учебное пособие / Л. И. Турчак, П. В. Плотников. – 2-е изд. перераб. и доп. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 304 с.

5. Ахметова Ф. Х. Обучение студентов интегрированию в среде MathCAD // Концепт. – 2017. – №V8. – URL: https://cyberleninka.ru/article/n/obuchenie-studentov-integrirovaniyu-v-srede-mathcad (дата обращения: 18.07.2022).

6. Зубов И. Н., Зубов С. В, Стрекопытов И. С., Стрекопытов С. А. Численное интегрирование // Вестник МГУ. – 2012. – №2. – URL: https://cyberleninka.ru/article/n/chislennoe-integrirovanie (дата обращения: 18.07.2022).

## List of references

1. Lyutoev A. A. Prikladnaya matematika i matematicheskoe modelirovanie : uchebnoe posobie / A. A. Lyutoev, E. N. Motryuk. – Uhta: UGTU, 2022. – 156 c.

2. Amosov A. A. Vychislitel'nye metody / A. A. Amosov, YU. A. Dubinskij, N. V. Kopchenova. – Moskva : Lan', 2014. – 672 s.

3. Demidovich B. P. Osnovy vychislitel'noj matematiki / B. P. Demidovich, I. A. Maron. – Moskva : Lan', 2011. – 672 s.

4. Turchak L. I. Osnovy chislennyh metodov : uchebnoe posobie / L. I. Turchak, P. V. Plotnikov. – 2-e izd. pererab. i dop. – Moskva : FIZMATLIT, 2003. – 304 s.

5. Ahmetova F. H. Obuchenie studentov integrirovaniyu v srede MathCAD // Koncept. – 2017. – №V8. – URL: https://cyberleninka.ru/article/n/obuchenie-studentov-integrirovaniyu-v-srede-mathcad (date of access: 18.07.2022).

6. Zubov I. N., Zubov S. V, Strekopytov I. S., Strekopytov S. A. CHislennoe integrirovanie // Vestnik MGU. – 2012. – №2. – URL: https://cyberleninka.ru/article/n/chislennoe-integrirovanie (date of access: 18.07.2022).